

傾斜海岸の上の水波

山 口 巖

Water Waves on a Sloping Beach

Iwao YAMAGUCHI

Abstract

A transformation which renders the non-linear shallow-water equations linear is shown. This transformation is, with small modifications, equivalent to that of Tuck and Hwang¹⁾. Using this transformation and by the introduction of a “potential” ϕ , the linear governing equation for ϕ is derived. Explicit solutions of the initial value problem for ϕ are obtained, and expressions for the motion of the shoreline as well as the history of a specific wave shape are presented. The run-up and the breaking condition of a specific wave are also given.

1. 序言と要約

平らな傾斜海岸上の水の水の研究は過去30年の間に大きく進歩し、多大な成果を上げている。非線型浅水理論に基づく優れた解析法の開発とランーアップの評価の可能性はその一つである。

Carrier and Greenspan²⁾ はホドグラフ変換の修正された型を用いて非線型浅水方程式の厳密解を与えた。そして、崩れることなしに傾斜海岸をよじ登って行く波が存在することを示し、その波のランーアップを求めた。

Tuck and Hwang¹⁾ は Carrier and Greenspan²⁾ とはわずかに異なった変換を非線型支配方程式に施し、線型な支配方程式を導出した。そして、ある指定された物理的に興味ある初期値問題の解を得た。

近年、橋本³⁾ は Carrier and Greenspan 解における t の λ に対する表式²⁾ が Kepler 方程式と恒等的であることを発見し、その解を用いて諸量の σ と t による陽な表現を与えた。そして、Kepler 方程式の解から波の崩れに対する条件が導出できることも示した。

本論文では、非線型浅水方程式の座標伸縮法による解法の試みの中から見出された一つの座標変換が、まず示される。(この変換は本質的には、Tuck and Hwang¹⁾ のそれと恒等的であるが、彼等は Carrier and Greenspanの解²⁾ から推論して導出したように思われる。) この座標変換と“ポテンシャル” ϕ の導入によって、 ϕ に対する線型な支配方程式が導出される。そして、ある特別な初期波形に対する初期値問題の解が求められ、海岸線の運動と指定された波形の時間経過の表式が与えられる。また、ランーアップと波の崩れに対する条件も見出される。

2. 解 析 法

水平方向に \bar{x} 軸を取る。平らな傾斜海岸は \bar{x} 軸に対して傾斜角 β をなすように取られる。そのとき、乱されていない水面 (すなわち \bar{x} 軸) からの深さ \bar{h} は次で与えられる。

$$(1) \quad \bar{h} = \beta \bar{x}$$

ここで、 $\beta \ll 1$ であり、バーは有次元量を表す。

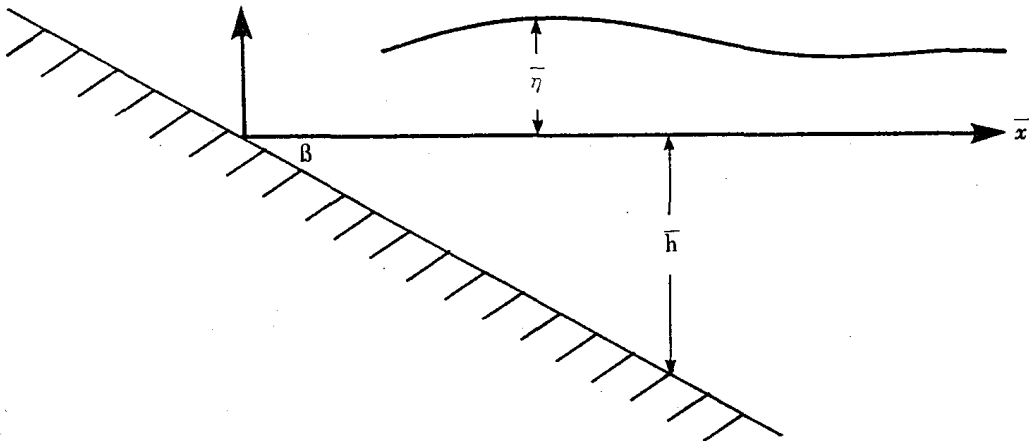


図1 傾斜海岸のスケッチ

非線型浅水理論の質量と運動量の保存式は次で与えられる。

$$(2) \quad \bar{\eta}_{\bar{t}} + [\bar{v}(\bar{h} + \eta)]_{\bar{x}} = 0$$

$$(3) \quad \bar{v}_{\bar{t}} + \left[g\bar{\eta} + \frac{1}{2}\bar{v}^2 \right]_{\bar{x}} = 0$$

ここで, \bar{v} , $\bar{\eta}$, \bar{t} そして g はそれぞれ, 水平速度成分, 自由表面の盛り上がり, 時間, そして重力の加速度である。

次の無次元量を導入すると都合がよい。

$$(4) \quad \begin{cases} v = \bar{v}/v_0 & , \quad \eta = \bar{\eta}/\beta l_0 \\ x = \bar{x}/l_0 & , \quad t = \bar{t}/T \end{cases}$$

ここで, $T = (l_0/\beta g)^{1/2}$, $v_0 = (l_0 \beta g)^{1/2}$ であり, l_0 は代表的な長さである。

(1) と (4) の代入でもって, (2) と (3) は次となる。

$$(5) \quad \eta_t + [v(x + \eta)]_x = 0$$

$$(6) \quad v_t + \left[\eta + \frac{1}{2}v^2 \right]_x = 0$$

次の新しい独立変数と従属変数を導入しよう。

$$(7) \quad \sigma = x + \eta \quad , \quad \lambda = t - v$$

$$(8) \quad \eta^*(\sigma, \lambda) = \eta(x, t) \quad , \quad v^*(\sigma, \lambda) = v(x, t)$$

変数変換 $\sigma = x + \eta$ によって, 海岸線 (全水深が 0 となる位置) は $\sigma = 0$ で指定される。 η^* と v^* はそれぞれ, η と v に恒等的であるが, とともに σ と λ の関数である。これらの変数変換は (5) と (6) に座標伸縮法が適用され, 従属変数のみならず独立変数も小パラメータ ε の冪で展開されるとき, v に対する第 2 オーダー以上の支配方程式が第 1 オーダー方程式より, より以上に特異であってはならないという原理 (Van Dyke⁴⁾) に従って推論された結果である

(付録1)。結果として、これらの変換は Tuck and Hwang¹⁾ のそれと恒等的である。

変換のヤコビアン J は次で与えられる。

$$(9) \quad J = (1 - \eta^*_{,\sigma})(1 + v^*_{,\lambda}) + \eta^*_{,\lambda} v^*_{,\sigma}$$

$J \neq 0$ として、(7) と (8) が (5) と (6) に代入されるとき、次を得る。

$$(10) \quad \left(\eta^* + \frac{1}{2} v^{*2} \right)_{,\lambda} + (\sigma v^*)_{,\sigma} = 0$$

$$(11) \quad v^*_{,\lambda} + \left(\eta^* + \frac{1}{2} v^{*2} \right)_{,\sigma} = 0$$

Carrier and Greenspan の式と対比させるために、さらに次の“ポテンシャル” $\phi(\sigma, \lambda)$ を導入する。

$$(12) \quad v^* = \phi_{,\sigma} \qquad \eta^* + \frac{1}{2} v^{*2} = -\phi_{,\lambda}$$

そのとき、(11) は自動的に満たされる。(12) を (10) に代入するとき、 ϕ に対する次式を得る。

$$(13) \quad (\sigma \phi_{,\sigma})_{,\sigma} - \phi_{,\lambda\lambda} = 0$$

このようにして、全く非線型な方程式の組 (5) と (6) が変換 (7), (8),

(12) によって線型な方程式 (13) になることは注目すべきことである。

ホドグラフ変換の修正された型の使用により、Carrier and Greenspan²⁾ は ϕ に対する次の線型な方程式を得ている。

$$(14) \quad (\sigma \phi_{,\sigma})_{,\sigma} - \sigma \phi_{,\lambda\lambda} = 0$$

左辺第2項における σ の出現は変数変換の性質の違いを表している。特に橋本³⁾ は $\sigma=0$ で有界な (14) の特解 (J_0 解) について調べた結果、 t の λ に対する表式が Kepler 方程式と恒等的であることを見出した。そして、Kepler

方程式の解を用いて v , η , x , そして λ の σ と t による陽な表現を与えた。橋本の解に対応する本支配方程式 (13) の解 ϕ , および η^* は次で与えられる。

$$(15) \quad \phi = A J_0(2\sqrt{\sigma}) \sin \lambda, \quad A > 0$$

ここで, A は定数であり, 分離定数は 1 に置かれている。

$$(16) \quad \eta^* = A^2 (B_0 B_1 - B_1^2) \\ - AB_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{J_{n-1}(2nAB_1) - J_{n+1}(2nAB_1)\} \cos nt \\ + 2A^2 B_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{J_{n-2}(2nAB_1) - J_{n+2}(2nAB_1)\} \cos nt,$$

$$B_0 = J_0(2\sqrt{\sigma}), \quad B_1 = J_1(2\sqrt{\sigma}) / (2\sqrt{\sigma})$$

ここで, J_n は n 次の第 1 種ベッセル関数である。(16) および $x = \sigma - \eta$ において t を指定し, σ を 0 から増加させることによって, 任意の時刻における波形を陽に与えることができる。 $A < 1$ である限り $\sigma \geq 0$ に対して波の崩れが生じないことも判る。

さて, ある水の盛り上がりが解放される問題を考察しよう。すなわち, どこでも $v(x, 0) = 0$ であって, 初期波形 $\eta(x, 0)$ が指定される問題を考察しよう。 $\lambda = t - v$ より, $t = 0$ のとき $v = 0$ の条件は $t = 0$ に対して $\lambda = 0$ を意味する。従って, (12) を参照するとき, $\phi(\sigma, 0) = 0$ そして $\phi_\lambda(\sigma, 0) = f(\sigma)$ なる初期条件と $\phi(0, \lambda)$ が有界であるという境界条件のもとで, 領域 $\sigma \geq 0, \lambda \geq 0$ に対して (13) が解かれねばならないことが判る。

ラプラス—ハンケル変換法によって上述の境界値問題の解は容易に得られ, 次で与えられる。(付録 2)

$$(17) \quad \phi(\sigma, \lambda) = 2 \int_0^\infty J_0(2\xi\sqrt{\sigma}) \sin \lambda \xi d\xi \int_0^\infty J_0(2\xi\sqrt{\sigma_0}) f(\sigma_0) d\sigma_0$$

ここで, $f(\sigma_0) = -\eta^*(\sigma_0, 0)$ であり, 波の初期波形を表す。

次節では、具体的に指定された $f(\sigma_0)$ に対する解が調べられると同時に、ランナーアップおよび波の崩れに対する条件が求められる。

3. ある初期波形に対する解

この節では、水の運動が $t = 0$ での静止状態から出発するところの水波の伝播の例が調べられる。初期波形は次で与えられるとする。

$$(18) \quad \eta^*(\sigma, 0) = A \left\{ \frac{1}{(\sigma+1)^{3/2}} - \frac{1}{(\sigma+1)^{5/2}} \right\}, \quad A > 0$$

すなわち、

$$(19) \quad f(\sigma_0) = -A \left\{ \frac{1}{(\sigma+1)^{3/2}} - \frac{1}{(\sigma+1)^{5/2}} \right\}$$

ここで、 A は定数である。 A の 2 つの値に対する波形が図 2 に示されている。

これらは $x = \frac{2}{3} \left\{ 1 - A \left(\frac{3}{5} \right)^{5/2} \right\}$ で最大波高 $0.186 A$ を持つ。

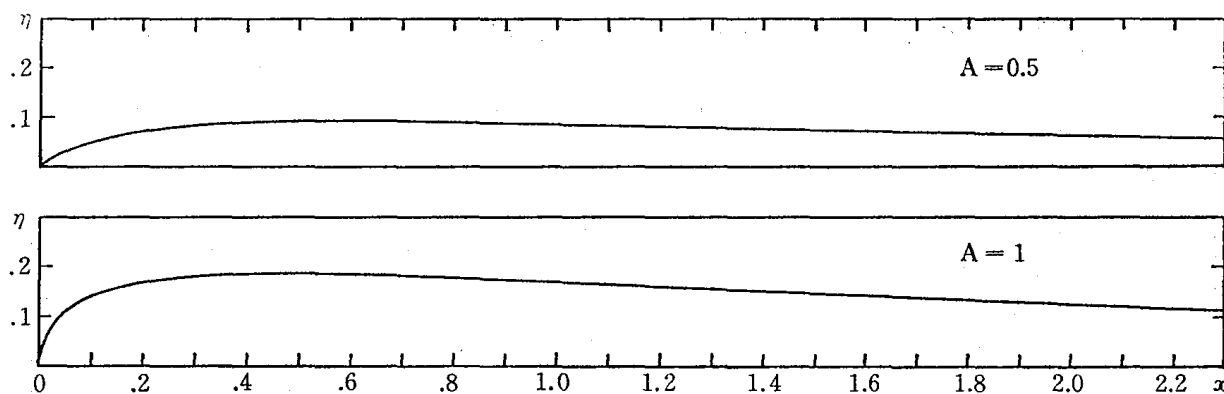


図2 $A=0.5$ と $A=1$ に対する初期波形

(19) が (17) に代入され、積分が実行されるとき、 ϕ に対する次の表式を得る。

$$(20) \quad \phi(\sigma, \lambda) = -\frac{8}{3} A \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\{(2-i\lambda)^2 + 4\sigma\}^{1/2}} - \frac{2-i\lambda}{\{(2-i\lambda)^2 + 4\sigma\}^{3/2}} \right]$$

また、次を見出す。

$$(21) \quad v^* = \frac{16}{3} A \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\{(2-i\lambda)^2 + 4\sigma\}^{3/2}} - \frac{3(2-i\lambda)}{\{(2-i\lambda)^2 + 4\sigma\}^{5/2}} \right]$$

$$(22) \quad \eta^* = \frac{8}{3} A \operatorname{Re} \left[\frac{3-i\lambda}{\{(2-i\lambda)^2 + 4\sigma\}^{3/2}} - \frac{3(2-i\lambda)^2}{\{(2-i\lambda)^2 + 4\sigma\}^{5/2}} \right] - \frac{1}{2} v^{*2}$$

v^* と η^* の σ と λ によるさらなる陽な表示は付録3に与えられている。海岸線上での諸量は $\sigma=0$ と置くことにより得られ、次で与えられる。

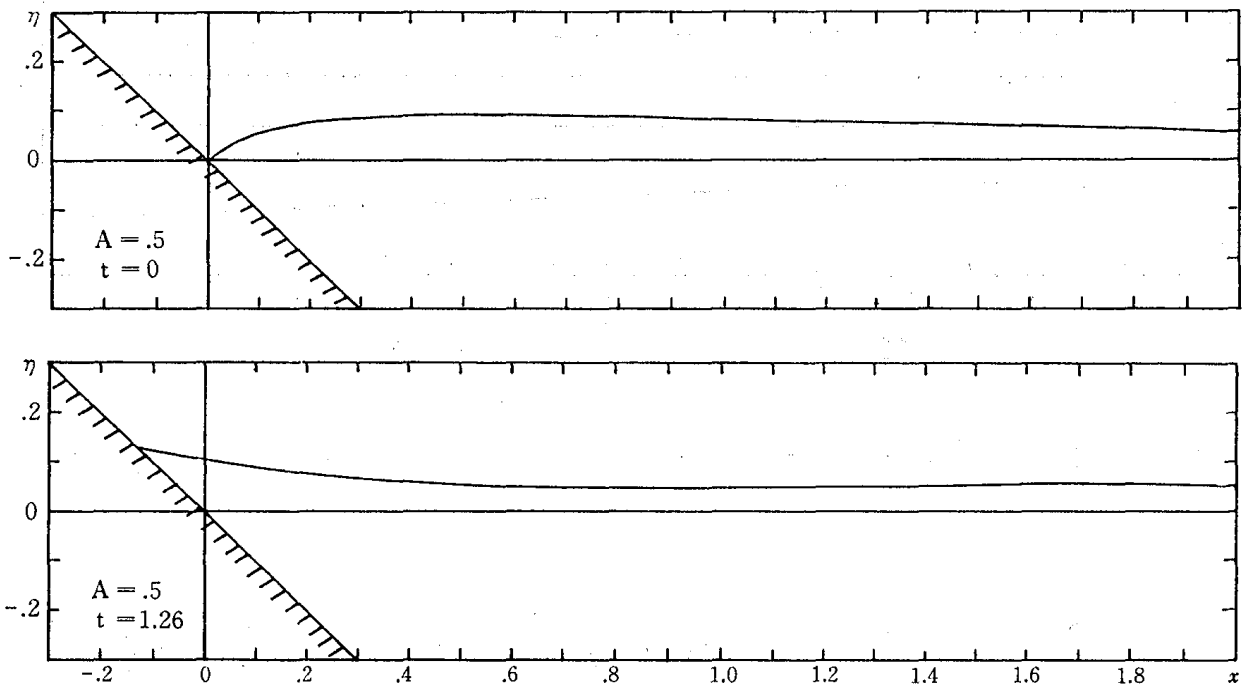
$$(23) \quad v^*(0, \lambda) = -\frac{16}{3} A \frac{\lambda(\lambda^4 - 32\lambda^2 + 48)}{(\lambda^2 + 4)^4}$$

$$(24) \quad \eta^*(0, \lambda) = -\frac{8}{3} A \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 12)}{(\lambda^2 + 4)^3} - \frac{1}{2} v^{*2}(0, \lambda)$$

$$(25) \quad x = -\eta^*(0, \lambda), \quad t = \lambda + v^*(0, \lambda)$$

海岸をよじ登る波によって達成される最大・最小のランーアップを求めることは興味あることである。最大・最小ランーアップで、 $v^*(0, \lambda) = 0$ であることを考慮すれば、次を得る。

$$(26) \quad x_{\max} = -0.253A, \quad x_{\min} = 0.037A$$



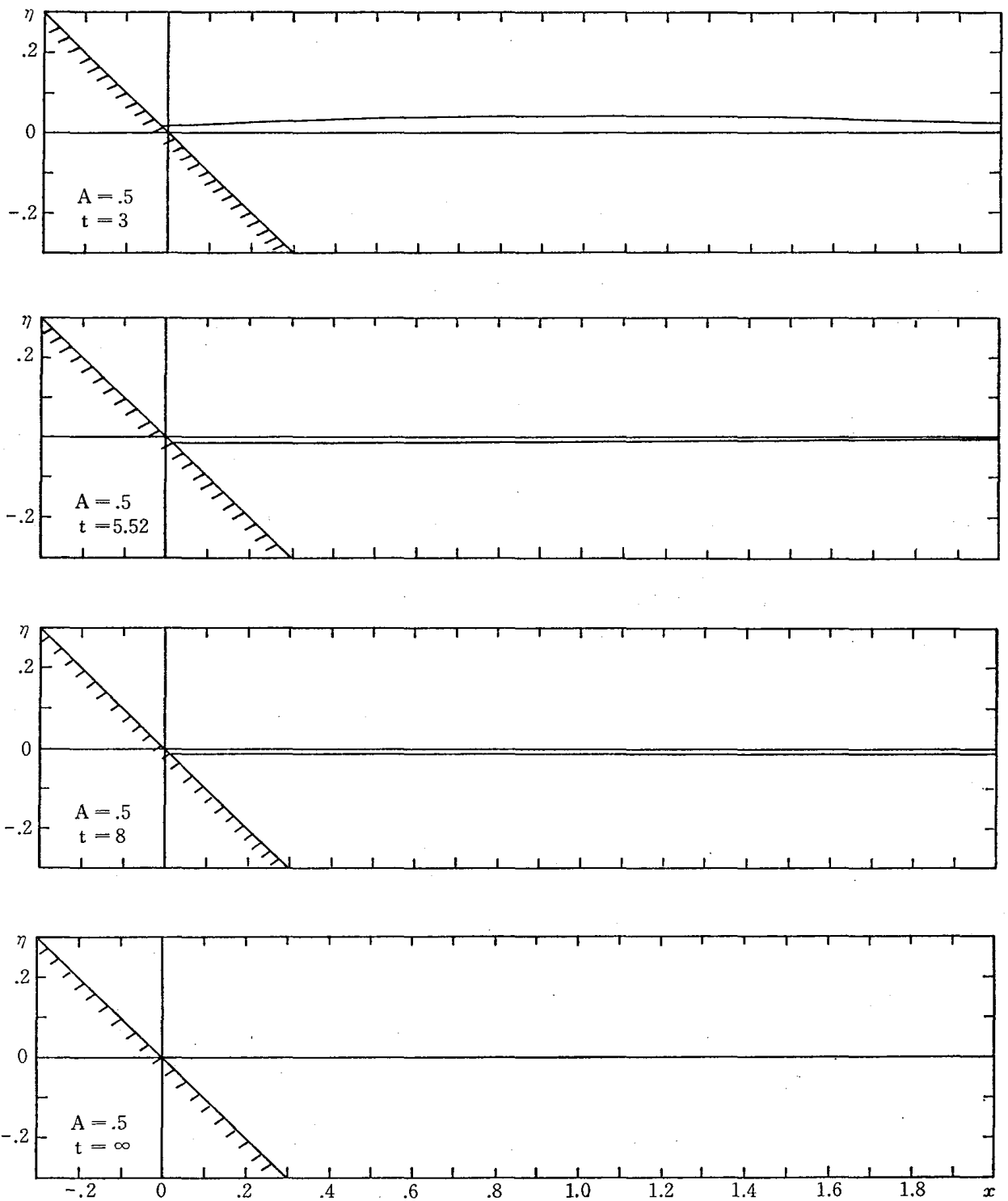
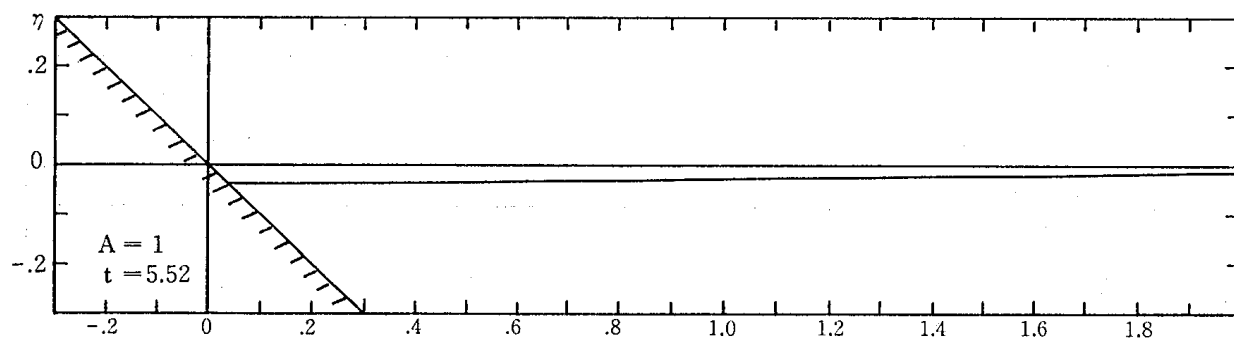
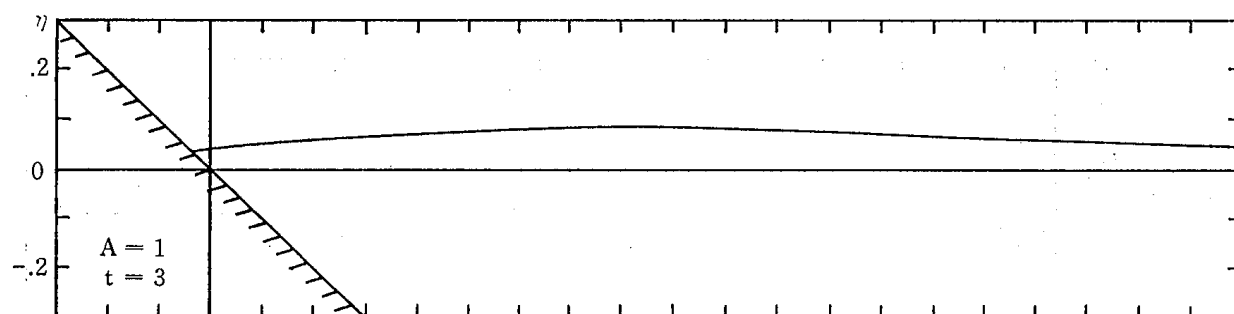
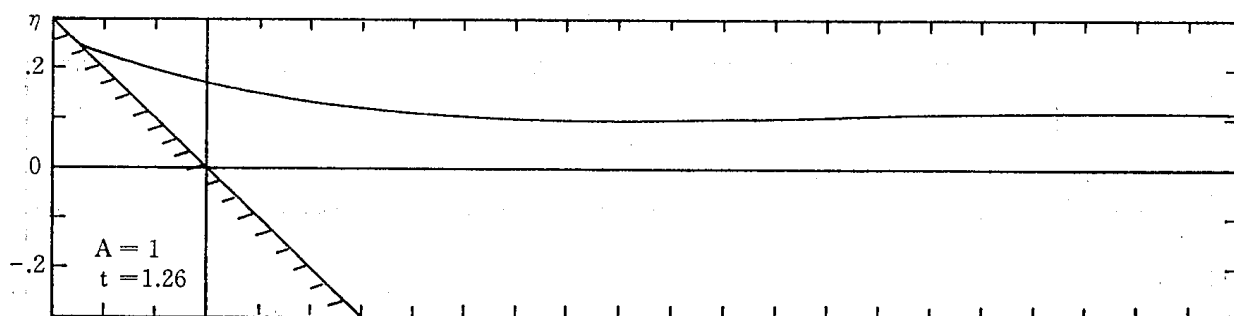
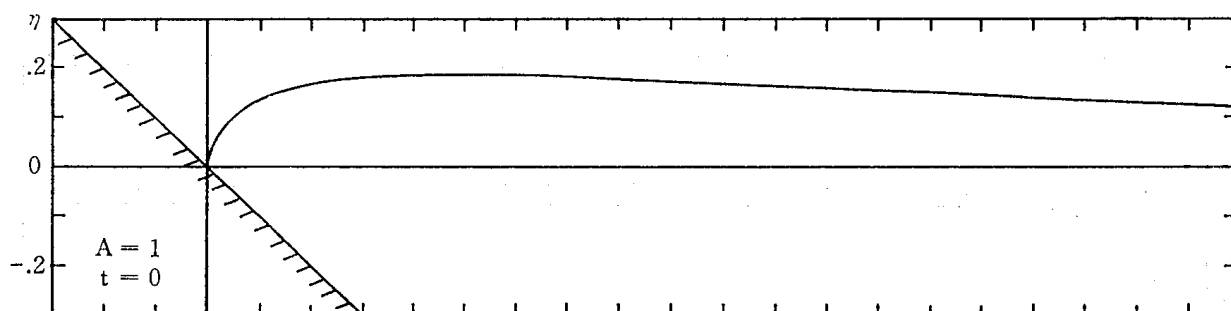


図3-1 $A=0.5$ に対する波形の時間経過



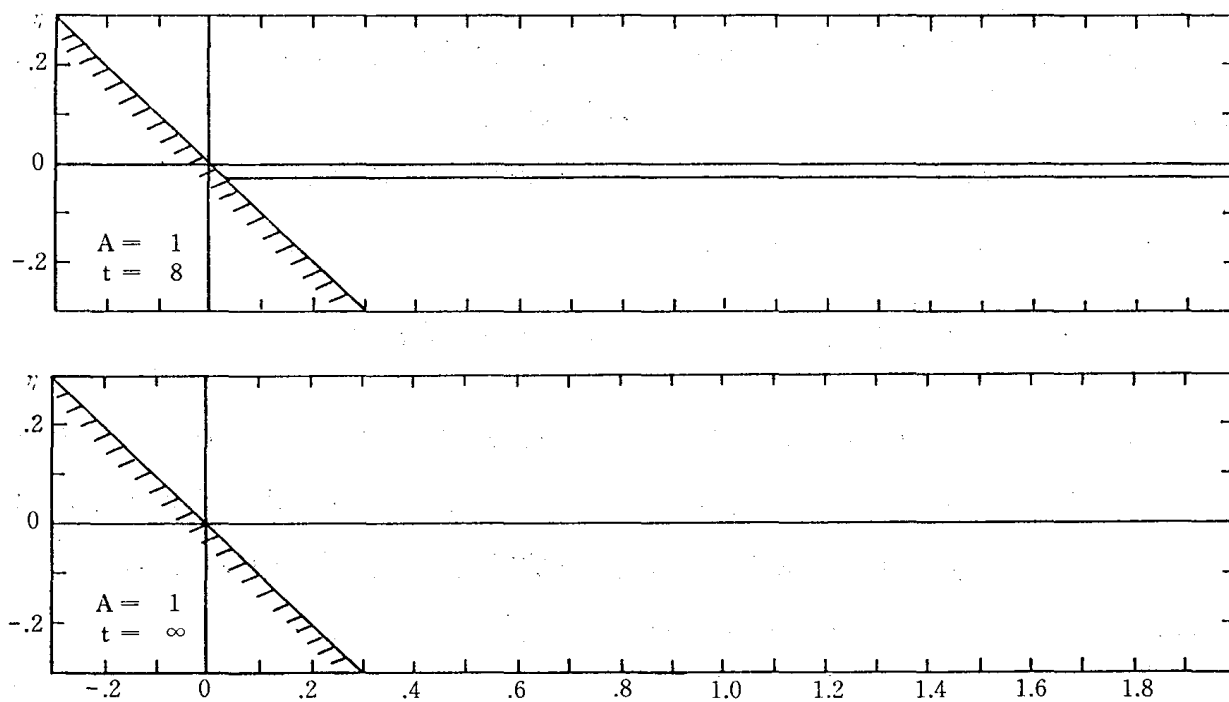


図3-2 $A = 1$ に対する波形の時間経過

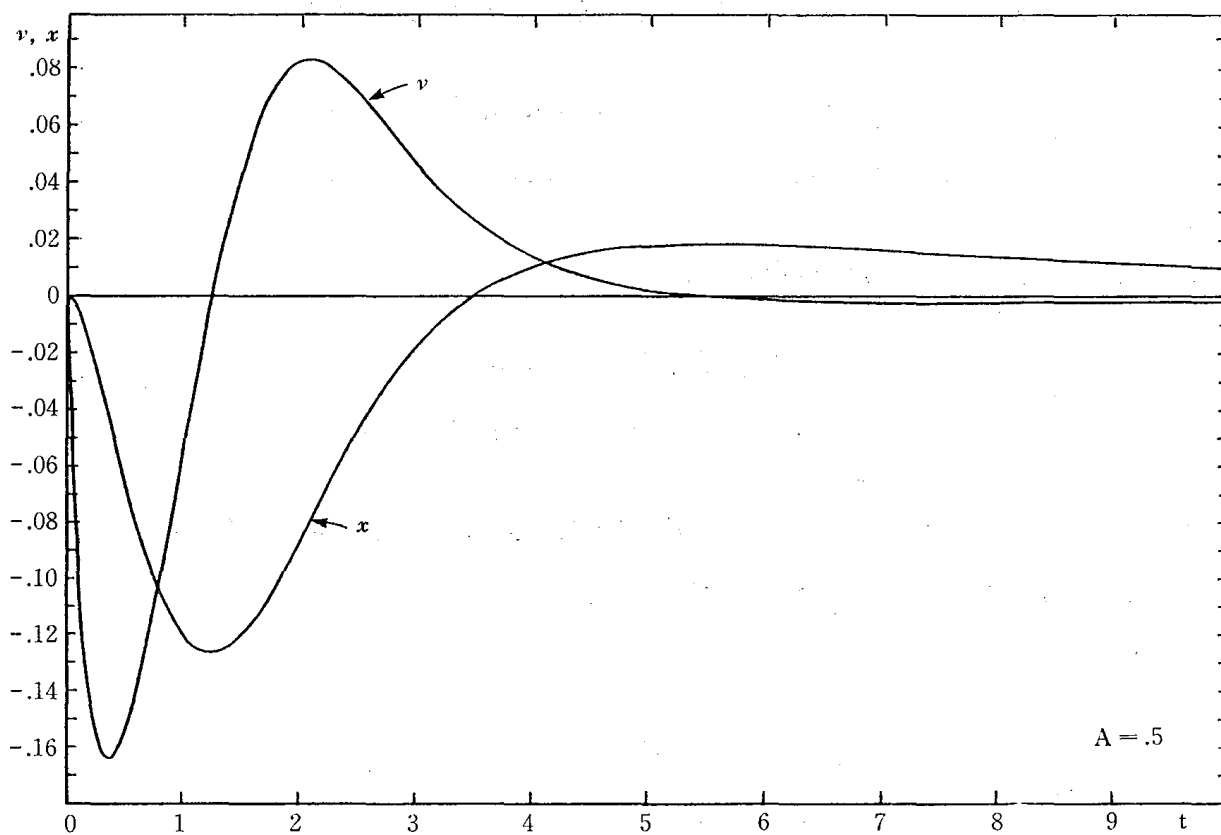


図4 時間に対する海岸線の位置と海岸線での速度 ($A = 0.5$ の場合)

このようにして、達成される最大波高は最大初期波高より約36%大きいことが判る。図3は波の運動の時間経過を示す。図4は海岸線の位置と海岸線での速度のプロットである。海岸線はまず、平均水位より上へ上昇し、それから、それより下方へ下がり、その後ゆっくりと平均水位へ落ち着く。

ヤコービアン J は次で表される。

$$(27) \quad J = (1 + v^*_{\lambda} + \sqrt{\sigma} v^*_{\sigma}) (1 + v^*_{\lambda} - \sqrt{\sigma} v^*_{\sigma})$$

(A3. 7) を用いて (27) の右辺が計算されるならば、 J は $A \leq 1$ のとき $\sigma > 0$ に対して、どこにおいても0にならないことが判る。 $A = 1$ のとき、まず $\sigma = 0$ で $J = 0$ となり、波の崩れが海岸線で生ずる。 $A > 1$ のとき、 $\sigma > 0$ に対して、あるところで $J = 0$ となり、波の崩れが生ずる。

付 録 1.

η と v を小パラメータ ϵ ($\ll 1$) の冪で次の如く展開する。

$$(A1. 1) \quad \begin{cases} \eta = \epsilon \eta_1(\sigma, \lambda) + \epsilon^2 \eta_2(\sigma, \lambda) + \epsilon^3 \eta_3(\sigma, \lambda) + \dots \\ v = \epsilon v_1(\sigma, \lambda) + \epsilon^2 v_2(\sigma, \lambda) + \epsilon^3 v_3(\sigma, \lambda) + \dots \end{cases}$$

x と t も同様に ϵ の冪で展開する。

$$(A1. 2) \quad \begin{cases} x = \sigma + \epsilon f_1(\sigma, \lambda) + \epsilon^2 f_2(\sigma, \lambda) + \dots \\ t = \lambda + \epsilon g_1(\sigma, \lambda) + \epsilon^2 g_2(\sigma, \lambda) + \dots \end{cases}$$

(A1. 1) と (A1. 2) が (5) と (6) に代入されるとき、 $J = x_{\sigma} t_{\lambda} - x_{\lambda} t_{\sigma} \neq 0$ として、 ϵ の3次のオーダーまでで次を得る。

$O(\epsilon)$ に対して、

$$(A1. 3) \quad \begin{cases} \eta_{1\lambda} + (\sigma v_1)_{\sigma} = 0 \\ v_{1\lambda} + \eta_{1\sigma} = 0 \end{cases}$$

$O(\epsilon^2)$ に対して、

$$(A1. 4) \quad \begin{cases} \eta_{2\lambda} + (\sigma v_2)_\sigma = -f_{1\sigma}\eta_{1\lambda} + f_{1\lambda}\eta_{1\sigma} - g_{1\lambda}(\sigma v_1)_\sigma + g_{1\sigma}(\sigma v_1)_\lambda \\ \quad - \{v_1(f_1 + \eta_1)\}_\sigma \\ v_{2\lambda} + \eta_{2\sigma} = -f_{1\sigma}v_{1\lambda} + f_{1\lambda}v_{1\sigma} - g_{1\lambda}\eta_{1\sigma} + g_{1\sigma}\eta_{1\lambda} - \left(\frac{1}{2}v_1^2\right)_\sigma \end{cases}$$

$O(\epsilon^3)$ に対して,

$$(A1. 5) \quad \begin{cases} \eta_{3\lambda} + (\sigma v_3)_\sigma = -f_{2\sigma}\eta_{1\lambda} - f_{1\sigma}\eta_{2\lambda} + f_{2\lambda}\eta_{1\sigma} + f_{1\lambda}\eta_{2\sigma} - g_{2\lambda}(\sigma v_1)_\sigma \\ \quad - g_{1\lambda}\{\sigma v_2 + v_1(f_1 + \eta_1)\}_\sigma + g_{2\sigma}(\sigma v_1)_\lambda \\ \quad + g_{1\sigma}\{\sigma v_2 + v_1(f_1 + \eta_1)\}_\lambda \\ \quad - \{v_2(f_1 + \eta_1) + v_1(f_2 + \eta_2)\}_\sigma \\ v_{3\lambda} + \eta_{3\sigma} = -f_{2\sigma}v_{1\lambda} - f_{1\sigma}v_{2\lambda} + f_{2\lambda}v_{1\sigma} + f_{1\lambda}v_{2\sigma} - g_{2\lambda}\eta_{1\sigma} \\ \quad - g_{1\lambda}\left(\eta_2 + \frac{1}{2}v_1^2\right)_\sigma + g_{2\sigma}\eta_{1\lambda} \\ \quad + g_{1\sigma}\left(\eta_2 + \frac{1}{2}v_1^2\right)_\lambda - (v_1v_2)_\sigma \end{cases}$$

(A1. 3) の上式を σ で, 下式を λ でそれぞれ偏微分し引き算するとき, v_1 に対して次の方程式を得る。

$$(A1. 6) \quad (\sigma v_1)_{\sigma\sigma} - v_{1\lambda\lambda} = 0$$

(A1. 4) から v_2 に対する方程式を導出することを考える。そのためには,

結果として得られる高次の $v_n (n=2, 3, \dots)$

(A1. 7) に対する方程式が v_1 に対する方程式より
より以上に特異であってはならない。

という原理 (Van Dyke⁴⁾) に従って, f_1, g_1 を決定しなければならない。

(A1. 4) はその各右辺の形から,

$$(A1. 8) \quad f_1 = -\eta_1, \quad g_1 = v_1$$

と選ぶならば,

$$(A1. 9) \quad \begin{cases} \eta_{2\lambda} + (\sigma v_2)_\sigma = -\left(\frac{1}{2}v_1^2\right)_\lambda \\ v_{2\lambda} + \eta_{2\sigma} = -\left(\frac{1}{2}v_1^2\right)_\sigma \end{cases}$$

を得る。(A1. 9) の上式を σ で、下式を λ でそれぞれ偏微分し引き算するとき、

$$(A1. 10) \quad (\sigma v_2)_{\sigma\sigma} - v_{2\lambda\lambda} = 0$$

となる。このようにして、原理 (A1. 7) を満たす結果が得られた。同様にして、(A1. 5) で、

$$(A1. 11) \quad f_2 = -\eta_2, \quad g_2 = v_2$$

と選ぶとき、(A1. 5) は

$$(A1. 12) \quad \begin{cases} \eta_{3\lambda} + (\sigma v_3)_\sigma = -(v_1 v_2)_\lambda \\ v_{3\lambda} + \eta_{3\sigma} = -(v_1 v_2)_\sigma \end{cases}$$

となり、

$$(A1. 13) \quad (\sigma v_3)_{\sigma\sigma} - v_{3\lambda\lambda} = 0$$

を得る。この結果も、原理 (A1. 7) を満たしていることが判る。

選択 (A1. 8) と (A1. 11) が (A1. 2) に代入されるとき、(A1. 1) を参照するならば次を得る。

$$(A1. 14) \quad \begin{cases} x = \sigma - \epsilon \eta_1 - \epsilon^2 \eta_2 - \cdots = \sigma - \eta \\ t = \lambda + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \cdots = \lambda + v \end{cases}$$

以上の結果は変数変換

$$(A1. 15) \quad \sigma = x + \eta, \quad \lambda = t - v$$

によって、 v に対する次の線型な方程式の導出の可能性を示唆している。

$$(A1. 16) \quad (\sigma v)_{\sigma\sigma} - v_{\lambda\lambda} = 0$$

付 録 2.

変数変換

$$(A2. 1) \quad \sigma = \beta^2/4$$

により, (13) は次となる。

$$(A2. 2) \quad \frac{1}{\beta}(\beta\phi_{\beta})_{\beta} - \phi_{\lambda\lambda} = 0$$

ϕ のラプラスーハンケル変換 $\hat{\phi}$ を次で定義する。

$$(A2. 3) \quad \hat{\phi}(\xi, s) = \int_0^{\infty} e^{-s\lambda} d\lambda \int_0^{\infty} \beta J_0(\xi\beta) \phi(\beta, \lambda) d\beta$$

(A2. 2)にラプラスーハンケル変換を適用し, 境界条件および初期条件を考慮するとき次を得る。

$$(A2. 4) \quad \hat{\phi} = \frac{1}{s^2 + \xi^2} \int_0^{\infty} \beta_0 J_0(\xi\beta_0) f\left(\frac{\beta_0^2}{4}\right) d\beta_0$$

ハンケル変換の逆変換

$$\bar{\phi}(\beta, s) = \int_0^{\infty} \xi J_0(\beta\xi) \hat{\phi}(\xi, s) d\xi$$

により, 次を得る。

$$(A2. 5) \quad \bar{\phi}(\beta, s) = \int_0^{\infty} \frac{\xi}{s^2 + \xi^2} J_0(\beta\xi) d\xi \int_0^{\infty} \beta_0 J_0(\xi\beta_0) f\left(\frac{\beta_0^2}{4}\right) d\beta_0$$

さらに, ラプラス変換の逆変換

$$\phi(\beta, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda s} \bar{\phi}(\beta, s) ds$$

をとるとき

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\xi e^{\lambda s}}{s^2 + \xi^2} ds = \sin \lambda \xi$$

であることに注意すれば、 $\phi(\sigma, \lambda)$ に対する次の表式を得る。

$$(A2. 6) \quad \phi(\sigma, \lambda) = 2 \int_0^\infty J_0(2\xi\sqrt{\sigma}) \sin \lambda \xi \, d\lambda \int_0^\infty J_0(2\xi\sqrt{\sigma_0}) f(\sigma_0) d\sigma_0$$

付 録 3.

(21), (22) は次の如く書き替えられる。

$$(A3. 1) \quad v^* = -\frac{16}{3} A \frac{1}{r^5} \operatorname{Im}[(F-iG)(-f+4i\lambda)^{1/2}]$$

$$(A3. 2) \quad \eta^* = \frac{8}{3} A \frac{1}{r^5} \operatorname{Re}[(H+iI)(-f+4i\lambda)^{1/2}] - \frac{1}{2} v^{*2}$$

ここで,

$$(A3. 3) \quad \begin{cases} f = \lambda^2 - 4\sigma - 4 \\ r = (f^2 + 16\lambda^2)^{1/2} \\ F = f^3 + 6f^2 - 8\lambda^2 f - 96\lambda^2 \\ G = \lambda(7f^2 + 48f + 16\lambda^2) \\ H = -3f^3 + (7\lambda^2 - 12)f^2 + 48\lambda^2 f + 16\lambda^2(\lambda^2 + 12) \\ I = \lambda f(f + 24f - 8\lambda^2 + 96) \end{cases}$$

いま,

$$(A3. 4) \quad -f + 4i\lambda = re^{i\theta}$$

と置くとき、 $(-f + 4i\lambda)^{1/2}$ の 2 根の内,

$$(A3. 5) \quad (-f + 4i\lambda)^{1/2} = r^{1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

のみを考える。

$\sin (\theta/2)$, $\cos (\theta/2)$ は

$$(A3. 6) \quad \begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{r+f}{r} \right)^{1/2} \\ \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{r-f}{r} \right)^{1/2} \end{cases}$$

と表される。

(A3. 6) が (A3. 5) に代入され, その結果が (A3. 1) と (A3. 2) に代入されるならば, v^* , η^* に対する次の表式を得る。

$$(A3. 7) \quad v^* = -\frac{8\sqrt{2}}{3} A \frac{1}{r^5} [F(r+f)^{1/2} - G(r-f)^{1/2}]$$

$$(A3. 8) \quad \eta^* = \frac{4\sqrt{2}}{3} A \frac{1}{r^5} [H(r-f)^{1/2} - I(r+f)^{1/2}] - \frac{1}{2} v^{*2}$$

引 用 文 献

- 1) E. O. Tuck and L. -S. Hwang, *J. Fluid Mech.* **51** (1972) 449-461
- 2) G. F. Carrier and H. P. Greenspan, *J. Fluid Mech.* **4** (1958) 97-109
- 3) 橋本次郎 未刊原稿 (1987)
- 4) M. D. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Academic Press. (1964)